Исследование операций. Лекция 4.

Крамаренко К.Е.
Кафедра ВС

Симплексный метод

Для решения ЗЛП существует универсальный метод – метод последовательного улучшения плана или ***симплекс-метод***.

Каноническая форма ЗЛП

Предполагает выполнение следующих требований:

- Все ограничения преобразуются в равенства с неотрицательной правой частью.
- Все переменные неотрицательны.

Преобразование неравенств в равенства

Неравенства любого типа($\leq$ или $\geq$) можно преобразовать в равенства путем добавления в левую часть неравенств дополнительных переменных.

Преобразование неравенств в равенства

Для неравенств типа «≤» в левую часть неравенства вводится неотрицательная переменная(которая показывает остаток):

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, x_3 \geq 0$$

Преобразование неравенств в равенства

Для неравенств типа «≥» в левую часть неравенства вводится неотрицательная переменная(которая показывает избыточность):

$$x_1 + x_2 \geq 50$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 50, x_3 \geq 0$$

Каноническая форма ЗЛП

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n; b_i \geq 0, i = 1,2, \dots, m$$

Каноническая форма ЗЛП

Пример:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow max$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 300$$

$$x_1 + x_2 \leq 150$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

Каноническая форма ЗЛП

Пример:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to max$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 300$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 150$$

$$x_{1,2,3,4} \geq 0$$

Переход от графического решения к алгебраическому

Графическое представление всех ограничений, включая условие неотрицательности

Пространство решений состоит из бесконечного количества ***допустимых точек***

Определяются ***допустимые угловые точки*** пространства решений

Кандидатами на оптимальное решение будут конечное число ***угловых точек***

Целевая функция используется для определения ***оптимальной угловой точки***

Задание пространства решений посредством системы из m линейных уравнений с n неотрицательными переменными, $m > n$

Задача имеет бесконечное количество допустимых решений

Находятся ***допустимые базисные решения*** пространства решений

Кандидатами на оптимальное решение будут конечное число ***базисных допустимых решений***

Целевая функция используется для определения ***оптимального базисного допустимого решения***

Переход от графического решения к алгебраическому

Для полного перехода к алгебраическому методу решения ЗЛП необходимо как-то назвать угловые точки разного типа на «алгебраическом» языке. **n – m** переменные, которые полагаются равными 0, называются ***небазисными переменными***.

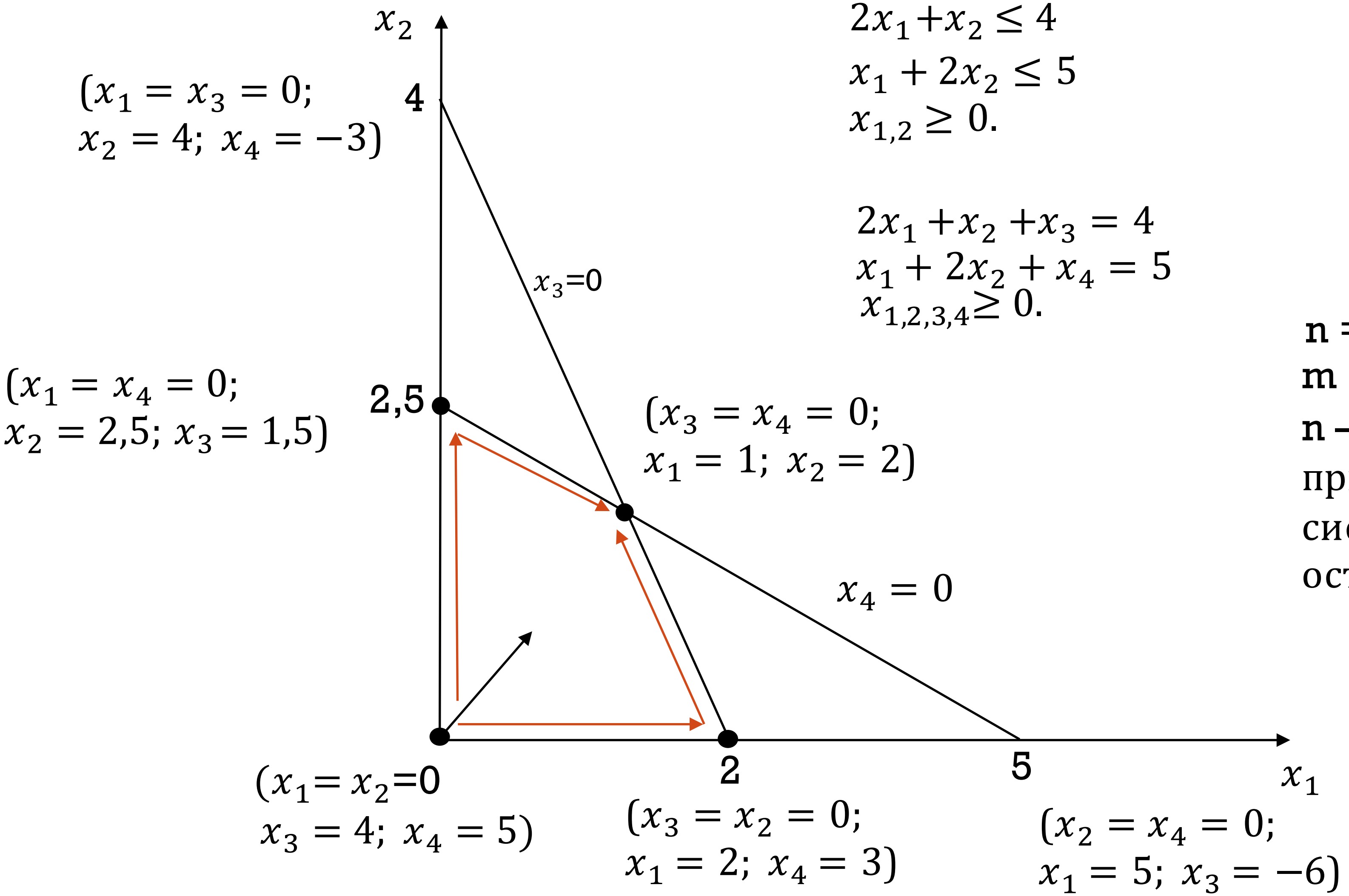
Если оставшиеся **m** переменные имеют единственное решение, то в этом случае они называются ***базисными***, а совокупность значений, которые они получают в результате решения системы уравнений, составляют ***базисное решение.***

Если при этом все переменные принимают неотрицательные значения, то такое базисное решение является ***допустимым.*** Иначе – ***недопустимым.***

Переход от графического решения к алгебраическому

$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to max$$
$$2x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 + 2x_2 \le 5$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 5$$
$$x_{1,2,3,4} \ge 0.$$



n = 4 – количество переменных
m = 2 – количество уравнений
n – m = 4 – 2 = 2 переменные принимают 0 значения. И решаем систему относительно двух оставшихся.

Симплексный метод

Пример:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_6) = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$$
$$-x_1 + x_2 + x_5 = 1$$
$$x_2 + x_6 = 2$$
$$x_{1,2,\dots,6} \geq 0$$

Здесь $x_{3,4,5,6}$ - дополнительные переменные

$$\mathrm{z} - 5x_1 - 4x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 - 0x_6 = 0$$

Симплексный метод

n = 6
m = 4
n – m = 2 – количество небазисных переменных($\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$)
Первая точка $\boldsymbol{x_1 = x_2 = 0}$

$$z - 5x_1 - 4x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 - 0x_6 = 0$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$$
$$-x_1 + x_2 + x_5 = 1$$
$$x_2 + x_6 = 2$$

Базис	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
x_3	0	6	4	1	0	0	0	24
x_4	0	1	2	0	1	0	0	6
x_5	0	-1	1	0	0	1	0	1
x_6	0	0	1	0	0	0	1	2

Для определения следующей переменной, которую будем вводить в базис, анализируем строку z и выбираем переменную(небазисную) с самым большим коэффициентом(если имеются равные коэффициенты, то выбираем любой). Для задач поиска максимума выбираем наибольший отрицательный коэффициент (для минимума выбираем положительный). Если в строке не осталось больше подходящих коэффициентов, значит нашли оптимальное решение.

Симплексный метод

Переменная, которая вводиться в базис называется ***вводимой*** (для нашего примера x_1).
После чего определяем переменную, которую будем исключать из базиса(***исключаемая***).
Для этого строиться следующая таблица:

Базис	x_1	**Решение**	Отношение
x_3	6	24	x_1=24/6=4 (минимум)
x_4	1	6	x_1=6/1=6
x_5	-1	1	x_1=1/-1= -1 (не подходит)
x_6	0	2	x_1=2/0=∞ (не подходит)

Выбираем переменную у которой минимальное(положительное) значение в столбце отношений.
В нашем примере это переменная x_3.

Симплексный метод

Ведущий столбец

Ведущая строка

Базис	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
x_3	0	6	4	1	0	0	0	24
x_4	0	1	2	0	1	0	0	6
x_5	0	-1	1	0	0	1	0	1
x_6	0	0	1	0	0	0	1	2

Ведущий элемент находится на пересечении ведущей строки и ведущего столбца.

Процесс вычисления нового базисного решения:

1. Вычисление элементов новой ведущей строки.
   Новая ведущая строка = текущая ведущая строка / ведущий элемент

2. Вычисление элементов остальных строк, включая **z** – строку
   Новая строка = текущий элемент – ее коэффициент в ведущем столбце * новая ведущая строка

Симплексный метод

Новая ведущая строка = текущая ведущая строка / 6

Новая **z** – строка = текущая **z** – строка – (-5) * новая ведущая строка

Базис	**z**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**Решение**
z	1	0	-2/3	5/6	0	0	0	20
x_1	0	1	2/3	1/6	0	0	0	4
x_4	0	0	4/3	-1/6	1	0	0	2
x_5	0	0	5/3	1/6	0	1	0	5
x_6	0	0	1	0	0	0	1	2

Симплексный метод

Базис	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
z	1	0	-2/3	5/6	0	0	0	20
x_1	0	1	2/3	1/6	0	0	0	4
x_4	0	0	4/3	-1/6	1	0	0	2
x_5	0	0	5/3	1/6	0	1	0	5
x_6	0	0	1	0	0	0	1	2

Базис	x_2	Решение	Отношение
x_1	2/3	4	x_2=4/(2/3)=6
x_4	4/3	2	x_2=2/(4/3)=3/2(минимум)
x_5	5/3	5	x_2=5/(5/3)= 3
x_6	1	2	x_2=2/1=2

Симплексный метод

Новая ведущая строка = текущая ведущая строка / (4/3)

Новая **z** – строка = текущая **z** – строка – (-2/3) * новая ведущая строка

Базис	**z**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**Решение**
z	1	0	0	3/4	1/2	0	0	21
x_1	0	1	0	1/4	-1/2	0	0	3
x_2	0	0	1	-1/8	3/4	0	0	3/2
x_5	0	0	0	3/8	-5/4	1	0	5/2
x_6	0	0	0	1/8	-3/4	0	1	1/2

$\boldsymbol{x_1} = 3, \boldsymbol{x_2} = \frac{3}{2}, \boldsymbol{z} = \mathbf{21}$ – оптимальное решение